اسم الطالب: _____ الصف: _____ التاريخ: _____

ورقة مراجعة: الدالتون – الصف التاسع

التعريف، الخصائص، شروط الدالتون، حساب الزوايا والأطوال والمساحة، والبراهين

تعليمات:

- حُلّ جميع الأسئلة في المكان المخصّص لها.
- في أسئلة البرهان، اكتب كلّ ادّعاء مع تعليله في الجدول (الادّعاء | التعليل).
- يمكن استعمال خصائص الدالتون الواردة في صندوق التذكير (ما عدا السؤال الأول، حيث المطلوب برهانها)، ويمكن استعمال نتيجة بند سابق في حلّ بند لاحق.

تذكير: الدالتون

الدالتون (الطائرة الورقية) هو شكل رباعي فيه زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية. في الدالتون ABCD: AB = AD و CB = CD. القطر AC الذي يصل بين رأسي الزاويتين اللتين يلتقي فيهما ضلعان متساويان يُسمّى القطر الرئيسي.

خصائص الدالتون:

- القطر الرئيسي يقسم الدالتون إلى مثلثين متطابقين: △ADC ≅ △ABC.
- القطر الرئيسي ينصّف زاويتي الرأسين ∢A و ∢C.
- الزاويتان الأخريان متساويتان: ∢ADC = ∢ABC.
- القطر الرئيسي عمود منصّف للقطر الآخر: AC ⊥ BD و BM = MD (M نقطة تقاطع القطرين).

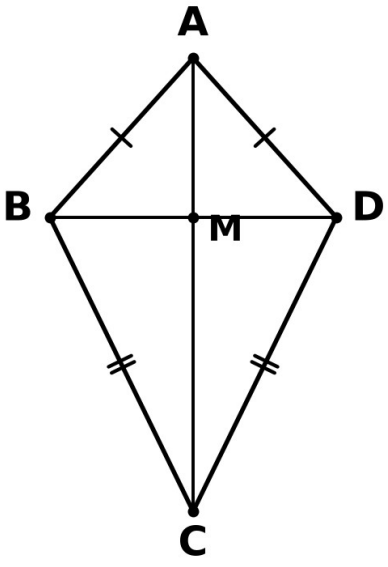
يكون الشكل الرباعي دالتونًا إذا تحقّق فيه أحد الشروط الآتية:

- زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية (التعريف).
- أحد قطريه ينصّف الزاويتين اللتين يمرّ برأسيهما.
- أحد قطريه عمود منصّف للقطر الآخر.

مساحة الدالتون:

نصف حاصل ضرب طولي القطرين: S = (AC · BD) : 2

السؤال الأول: خصائص الدالتون وبرهانها



ABCD شكل رباعي فيه: AB = AD و CB = CD، أي أنّ ABCD دالتون.

القطران AC و BD يتقاطعان في النقطة M.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

أ) برهن أنّ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		

ب) برهن أنّ القطر AC ينصّف الزاويتين $\angle BAD$ و $\angle BCD$، وأنّ $\angle ADC = \angle ABC$.

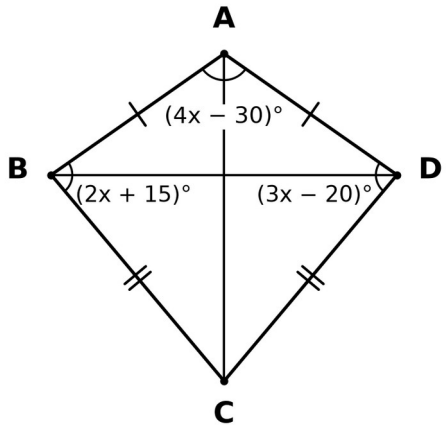
	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		

ج) برهن أنّ $AC \perp BD$ وأنّ $BM = MD$.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الثاني: حساب الزوايا



ABCD دالتون فيه AB = AD و CB = CD.

معطى:

∢ABC = (2x + 15)°

∢ADC = (3x − 20)°

∢BAD = (4x − 30)°

أ) احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس الزاوية ∢ABC. علّل.

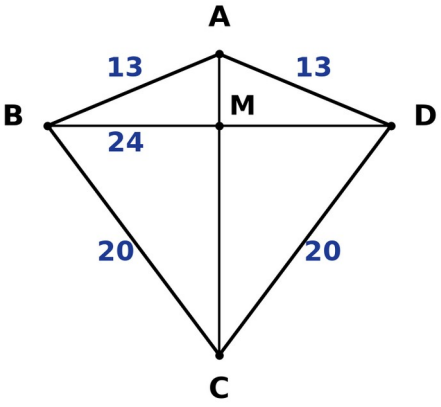
ب) احسب قياس الزاويتين ∢BAD و ∢BCD.

ج) احسب قياس الزاويتين ∢ABD و ∢CBD.

د) احسب قياس الزاويتين ∢BAC و ∢ACB.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الثالث: أطوال ومساحة (نظرية فيثاغورس)



ABCD دالتون فيه:
AB = AD = 13 سم
CB = CD = 20 سم
طول القطر BD = 24 سم.
القطران يتقاطعان في النقطة M.

أ) احسب طول القطعة BM، وعلّل لماذا المثلث △ABM قائم الزاوية.

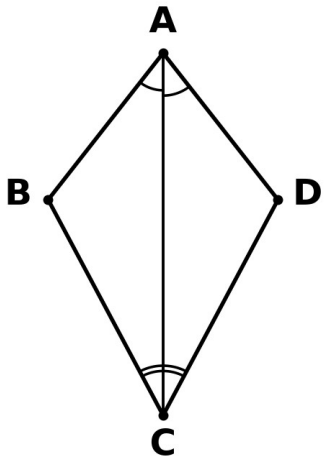
ب) احسب طولي القطعتين AM و MC، ثمّ احسب طول القطر AC.

ج) احسب محيط الدالتون ABCD ومساحته.

د) في دالتون آخر مساحته 60 سم²، وطول قطره الرئيسي 12 سم. احسب طول القطر الآخر.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الرابع: إثبات أنّ الشكل الرباعي دالتون

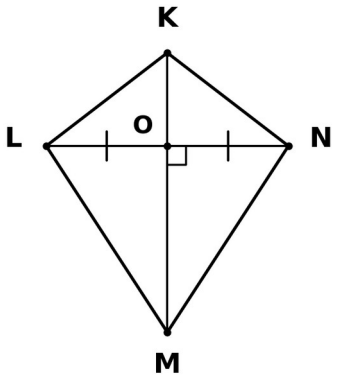


أ) في الشكل الرباعي ABCD، القطر AC ينصّف الزاوية $\angle BAD$ وينصّف الزاوية $\angle BCD$.

برهن أنّ الشكل الرباعي ABCD دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		

© المعلّمة كرستين عيد برانسى



ب) في الشكل الرباعي KLMN، القطران يتقاطعان في النقطة O، ومعطى: $KM \perp LN$ و $LO = ON$.
برهن أنّ الشكل الرباعي KLMN دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

ج) هل كلّ شكل رباعي قطراه متعامدان هو دالتون؟ علّل (يمكن الاستعانة برسم أو بمثال عددي).

.....

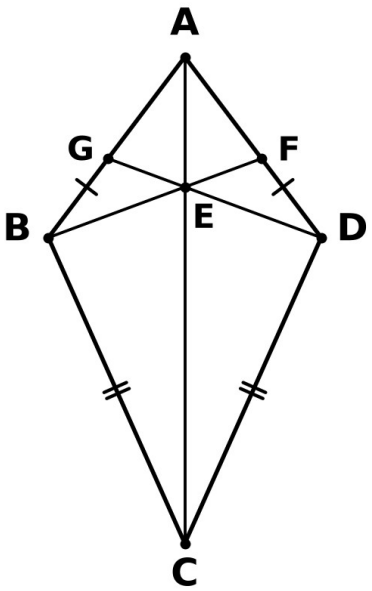
.....

.....

.....

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الخامس: نقطة على القطر الرئيسي



ABCD دالتون فيه AB = AD و CB = CD.

النقطة E تقع على القطر الرئيسي AC.

امتداد BE يقطع الضلع AD في النقطة F، وامتداد DE يقطع الضلع AB في النقطة G.

أ) برهن أنّ EB = ED.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		

ب) برهن أنّ ∢ADG = ∢ABF.

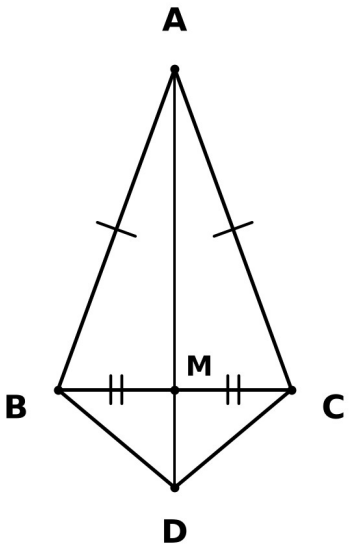
	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

ج) برهن أنّ BF = DG، ثمّ استنتج أنّ EF = EG.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

السؤال السادس: من المثلث المتساوي الساقين إلى الدالتون



في المثلث △ABC معطى: AB = AC، والنقطة M منتصف الضلع BC.

النقطة D تقع على امتداد المتوسّط AM (بعد النقطة M).

أ) برهن أنّ AM ⊥ BC.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

ب) برهن أنّ الشكل الرباعي ABDC دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		

ج) معطى: $\measuredangle BAC = 40°$ و $\measuredangle BDC = 100°$. احسب قياس الزاوية $\measuredangle ABD$.

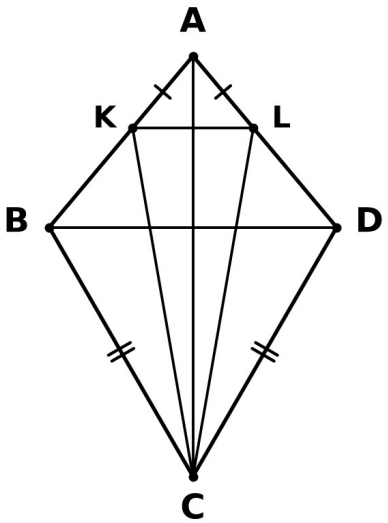
.....

.....

.....

.....

السؤال السابع (سؤال تحدٍّ)



ABCD دالتون فيه $AB = AD$ و $CB = CD$.

النقطة K تقع على الضلع AB، والنقطة L تقع على الضلع AD، بحيث $AK = AL$.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

أ) برهن أنّ $CK = CL$.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		

ب) برهن أنّ $KL \parallel BD$.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		

ج) برهن أنّ $\measuredangle DLC = \measuredangle BKC$.

	الادّعاء	التعليل
1		
2		
3		
4		
5		
6		

د) برهن أنّ القطر AC عمود منصّف للقطعة KL.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

مفتاح الإجابات

ورقة مراجعة: الدالتون – الصف التاسع

السؤال الأول: خصائص الدالتون وبرهانها

أ) برهن أنّ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AD$	معطى
2	$CB = CD$	معطى
3	$AC = AC$	ضلع مشترك
4	$\triangle ADC \cong \triangle ABC$	نظرية التطابق ض ض ض (من 1، 2، 3)

ب) برهن أنّ القطر AC ينصّف الزاويتين $\angle BAD$ و $\angle BCD$، وأنّ $\angle ADC = \angle ABC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\triangle ADC \cong \triangle ABC$	البند أ
2	$\angle DAC = \angle BAC$، أي AC ينصّف $\angle BAD$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
3	$\angle DCA = \angle BCA$، أي AC ينصّف $\angle BCD$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
4	$\angle ADC = \angle ABC$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين

ج) برهن أنّ $AC \perp BD$ وأنّ $BM = MD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AD$	معطى
2	$\angle DAM = \angle BAM$	البند ب (AC ينصّف $\angle BAD$)
3	$AM = AM$	ضلع مشترك
4	$\triangle ADM \cong \triangle ABM$	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)
5	$DM = BM$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين
6	$\angle AMD = \angle AMB$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
7	$\angle AMD + \angle AMB = 180°$	زاويتان متجاورتان
8	$\angle AMD = \angle AMB = 90°$، أي $AC \perp BD$	من 6 و 7

طريقة أخرى: المثلث $\triangle ABD$ متساوي الساقين ($AB = AD$)، وAM منصّف زاوية الرأس فيه (البند ب)، ومنصّف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين هو أيضًا ارتفاع ومتوسّط إلى القاعدة، إذن $AM \perp BD$ و $BM = MD$.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الثاني: حساب الزوايا

أ) احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس الزاوية ∢ABC. علّل.

في الدالتون، زاويتا الرأسين اللذين يصل بينهما القطر الآخر متساويتان: ∢ADC = ∢ABC.

$2x + 15 = 3x - 20 \implies x = 35$

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 2 \cdot 35 + 15 = 85°$

ب) احسب قياس الزاويتين ∢BAD و ∢BCD.

$\measuredangle BAD = 4 \cdot 35 - 30 = 110°$

مجموع زوايا الشكل الرباعي 360°:

$\measuredangle BCD = 360° - 110° - 85° - 85° = 80°$

ج) احسب قياس الزاويتين ∢ABD و ∢CBD.

AB = AD، إذن المثلث △ABD متساوي الساقين وزاويتا القاعدة فيه متساويتان:

$\measuredangle ABD = \measuredangle ADB = (180° - 110°) : 2 = 35°$

CB = CD، إذن المثلث △CBD متساوي الساقين:

$\measuredangle CBD = \measuredangle CDB = (180° - 80°) : 2 = 50°$

تحقّق: $\measuredangle ABC = 35° + 50° = 85°$

د) احسب قياس الزاويتين ∢BAC و ∢ACB.

القطر الرئيسي AC ينصّف الزاويتين ∢BAD و ∢BCD:

$\measuredangle BAC = 110° : 2 = 55°$

$\measuredangle ACB = 80° : 2 = 40°$

تحقّق: مجموع زوايا المثلث △ABC هو $55° + 85° + 40° = 180°$

السؤال الثالث: أطوال ومساحة (نظرية فيثاغورس)

أ) احسب طول القطعة BM، وعلّل لماذا المثلث △ABM قائم الزاوية.

القطر الرئيسي AC في الدالتون عمود منصّف للقطر الآخر BD، إذن AC ⊥ BD (أي ∢AMB = 90°)، والمثلث △ABM قائم الزاوية)، و $BM = 24 : 2 = 12$ سم.

ب) احسب طولي القطعتين AM و MC، ثمّ احسب طول القطر AC.

في المثلث القائم الزاوية △ABM، حسب نظرية فيثاغورس:

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \implies AM = 5$

في المثلث القائم الزاوية △CBM:

$MC^2 = CB^2 - BM^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \implies MC = 16$

$AC = AM + MC = 5 + 16 = 21$ سم.

ج) احسب محيط الدالتون ABCD ومساحته.

المحيط: $2 \cdot 20 + 2 \cdot 13 = 66$ سم.

المساحة تساوي نصف حاصل ضرب طولي القطرين: $S = (AC \cdot BD) : 2 = (21 \cdot 24) : 2 = 252$ سم².

تحقّق: $S(\triangle ABD) + S(\triangle CBD) = (24 \cdot 5) : 2 + (24 \cdot 16) : 2 = 60 + 192 = 252$

د) في دالتون آخر مساحته 60 سم²، وطول قطره الرئيسي 12 سم. احسب طول القطر الآخر.

$(12 \cdot d) : 2 = 60 \implies 6d = 60 \implies d = 10$

طول القطر الآخر 10 سم.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الرابع: إثبات أنّ الشكل الرباعي دالتون

أ) في الشكل الرباعي ABCD، القطر AC ينصّف الزاوية ∢BAD وينصّف الزاوية ∢BCD. برهن أنّ الشكل الرباعي ABCD دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1	∢BAC = ∢DAC	AC ينصّف ∢BAD (معطى)
2	AC = AC	ضلع مشترك
3	∢BCA = ∢DCA	AC ينصّف ∢BCD (معطى)
4	△ABC ≅ △ADC	نظرية التطابق ز ض ز (من 1، 2، 3)
5	AB = AD و CB = CD	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين
6	ABCD دالتون	شكل رباعي فيه زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية (تعريف الدالتون)

ب) في الشكل الرباعي KLMN، القطران يتقاطعان في النقطة O، ومعطى: KM ⊥ LN و LO = ON. برهن أنّ الشكل الرباعي KLMN دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1	LO = NO	معطى
2	∢KOL = ∢KON = 90°	KM ⊥ LN (معطى)
3	KO = KO	ضلع مشترك
4	△KOL ≅ △KON، إذن KL = KN	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)؛ أضلاع متناظرة
5	∢MOL = ∢MON = 90°	KM ⊥ LN (معطى)
6	MO = MO	ضلع مشترك
7	△MOL ≅ △MON، إذن ML = MN	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 5، 6)؛ أضلاع متناظرة
8	KLMN دالتون	من 4 و 7: زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية (تعريف الدالتون)

ملاحظة: يمكن أيضًا الاكتفاء بالشرط: «شكل رباعي أحد قطريه عمود منصّف للقطر الآخر هو دالتون»، لأنّ KM عمودي على LN وينصّفه.

ج) هل كلّ شكل رباعي قطراه متعامدان هو دالتون؟ علّل (يمكن الاستعانة برسم أو بمثال عددي).

لا. مثال: شكل رباعي ABCD قطراه متعامدان ويتقاطعان في M، حيث AM = 2، MC = 6، BM = 3، MD = 5.

حسب نظرية فيثاغورس: AB = √13، AD = √29، CB = √45، CD = √61 لا يوجد ضلعان متجاوران متساويان، إذن هذا الشكل ليس دالتونًا.

التعامد وحده لا يكفي؛ يجب أيضًا أن ينصّف أحدُ القطرين القطرَ الآخر.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الخامس: نقطة على القطر الرئيسي

أ) برهن أنّ $EB = ED$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AD$	معطى
2	$\measuredangle BAE = \measuredangle DAE$	القطر الرئيسي في الدالتون ينصّف زاوية الرأس $\measuredangle BAD$
3	$AE = AE$	ضلع مشترك
4	$\triangle ABE \cong \triangle ADE$	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)
5	$EB = ED$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين

ب) برهن أنّ $\measuredangle ADG = \measuredangle ABF$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\triangle ABE \cong \triangle ADE$	البند أ
2	$\measuredangle ABE = \measuredangle ADE$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
3	$\measuredangle ABF = \measuredangle ADG$	هما الزاويتان نفساهما من 2 (F على امتداد BE، وG على امتداد DE)

ج) برهن أنّ $BF = DG$، ثمّ استنتج أنّ $EF = EG$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle BAF = \measuredangle DAG$	زاوية مشتركة ($\measuredangle BAD$)
2	$AB = AD$	معطى
3	$\measuredangle ABF = \measuredangle ADG$	البند ب
4	$\triangle ABF \cong \triangle ADG$	نظرية التطابق ز ض ز (من 1، 2، 3)
5	$BF = DG$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين
6	$EB = ED$	البند أ
7	$EF = BF - EB = DG - ED = EG$	من 5 و 6 (E تقع على القطعتين BF و DG)

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال السادس: من المثلث المتساوي الساقين إلى الدالتون

أ) برهن أنّ $AM \perp BC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AC$	معطى
2	$BM = CM$	M منتصف BC (معطى)
3	$AM = AM$	ضلع مشترك
4	$\triangle ABM \cong \triangle ACM$	نظرية التطابق ض ض ض (من 1، 2، 3)
5	$\measuredangle AMB = \measuredangle AMC$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
6	$\measuredangle AMB = \measuredangle AMC = 90°$، أي $AM \perp BC$	زاويتان متجاورتان متساويتان (مجموعهما 180°)

طريقة أخرى: في المثلث المتساوي الساقين، المتوسّط إلى القاعدة هو أيضًا ارتفاع، إذن $AM \perp BC$.

ب) برهن أنّ الشكل الرباعي ABDC دالتون.

	الادّعاء	التعليل
1	$BM = CM$	M منتصف BC (معطى)
2	$\measuredangle BMD = \measuredangle CMD = 90°$	البند أ (D على المستقيم AM)
3	$DM = DM$	ضلع مشترك
4	$\triangle BMD \cong \triangle CMD$	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)
5	$DB = DC$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين
6	$AB = AC$ و $DB = DC$، إذن ABDC دالتون	معطى ومن 5: زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية (تعريف الدالتون)

طريقة أخرى: AD عمودي على BC وينصّفه، أي أنّ القطر AD عمود منصّف للقطر BC، إذن ABDC دالتون.

ج) معطى: $\measuredangle BAC = 40°$ و $\measuredangle BDC = 100°$. احسب قياس الزاوية $\measuredangle ABD$.

في الدالتون ABDC الزاويتان $\measuredangle ABD$ و $\measuredangle ACD$ متساويتان، ومجموع زوايا الشكل الرباعي 360°:
$\measuredangle ABD = (360° - 40° - 100°) : 2 = 110°$

طريقة أخرى: $\measuredangle ABC = (180° - 40°) : 2 = 70°$ و $\measuredangle DBC = (180° - 100°) : 2 = 40°$، إذن $\measuredangle ABD$ $= 70° + 40° = 110°$.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال السابع (سؤال تحدٍّ)

أ) برهن أنّ CK = CL.

	الادّعاء	التعليل
1	AK = AL	معطى
2	∢KAC = ∢LAC	القطر الرئيسي في الدالتون ينصّف زاوية الرأس ∢BAD
3	AC = AC	ضلع مشترك
4	△AKC ≅ △ALC	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)
5	CK = CL	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين

ب) برهن أنّ KL ∥ BD.

	الادّعاء	التعليل
1	∢AKL = ∢ALK	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين △AKL (AK = AL)
2	∢AKL = (180° − ∢BAD) : 2	مجموع زوايا المثلث △AKL يساوي 180°، ومن 1
3	∢ABD = ∢ADB	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين △ABD (AB = AD)
4	∢ABD = (180° − ∢BAD) : 2	مجموع زوايا المثلث △ABD يساوي 180°، ومن 3
5	∢AKL = ∢ABD	من 2 و 4
6	KL ∥ BD	زاويتان متناظرتان متساويتان (القاطع AB)

ج) برهن أنّ ∢DLC = ∢BKC.

	الادّعاء	التعليل
1	KB = AB − AK و LD = AD − AL	K على AB، وL على AD
2	KB = LD	من 1 (AB = AD و AK = AL)
3	CB = CD	معطى
4	∢KBC = ∢LDC	في الدالتون ∢ABC = ∢ADC
5	△KBC ≅ △LDC	نظرية التطابق ض ز ض (من 2، 4، 3)
6	∢BKC = ∢DLC	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين

طريقة أخرى: من البند أ △AKC ≅ △ALC، إذن ∢AKC = ∢ALC، والزاويتان ∢BKC و ∢DLC مكمّلتان لزاويتين متساويتين، إذن هما متساويتان.

د) برهن أنّ القطر AC عمود منصّف للقطعة KL.

معطى AK = AL، ومن البند أ CK = CL، إذن الشكل الرباعي AKCL دالتون (زوجان من الأضلاع المتجاورة المتساوية).

القطر الرئيسي AC في الدالتون AKCL عمود منصّف للقطر الآخر KL.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي