مدرسة راهبات المخلص الناصرة | בית ספר נזירות המושיע נצרת | SALVATORIAN SISTERS' SCHOOL NAZARETH
ص.ب. 121 P.O.BOX | ☎ 04/6554674 | 04/6084337 | NAZARETH 16101 נצרת
E.mail: school@sds-holyland.org www.sds-holyland.org

اسم الطالب: _____ الصف: _____ التاريخ: _____

ورقة عمل: الدالّة التربيعيّة والدالّة الخطّيّة

الصف التاسع

تذكير

- الصورة العامّة: $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$. إذا كان $a > 0$ فالقطع المكافئ قائم ونقطة رأسه صغرى، وإذا كان $a < 0$ فهو مقلوب ونقطة رأسه عظمى.
- صورة الرأس: $y = a(x - p)^2 + k$، نقطة الرأس (p, k)، ومعادلة محور التماثل $x = p$.
- صورة الضرب: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$، النقطتان الصفريّتان x_1 وx_2، ومحور التماثل في منتصفهما.
- الإحداثيّ x لنقطة الرأس (إلى اليسار)، وقانون الجذور (إلى اليمين):

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- الدالّة الخطّيّة: $y = mx + n$، حيث m الميل، و$(0, n)$ نقطة التقاطع مع المحور y. الميل بين نقطتين:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- نقاط التقاطع بين قطع مكافئ ومستقيم نجدها بمساواة التعبيرين وحلّ المعادلة التربيعيّة الناتجة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الأوّل: خواصّ الدالّة التربيعيّة

1. معطاة الدالّة $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$.

أ. جد إحداثيّات نقطة الرأس، وحدّد نوعها.

ب. اكتب معادلة محور التماثل.

ج. جد نقاط التقاطع مع المحورين.

د. جد المجال التصاعديّ والمجال التنازليّ.

هـ. جد المجال الموجب والمجال السالب.

و. ما أكبر قيمة للدالّة؟ اشرح.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

2. معطاة الدالّة $g(x) = x^2 + 4x - 12$.

أ. جد إحداثيّات نقطة الرأس، وحدّد نوعها.

ب. اكتب الدالّة بصورة الرأس $y = a(x - p)^2 + k$.

$g(x) =$ _____

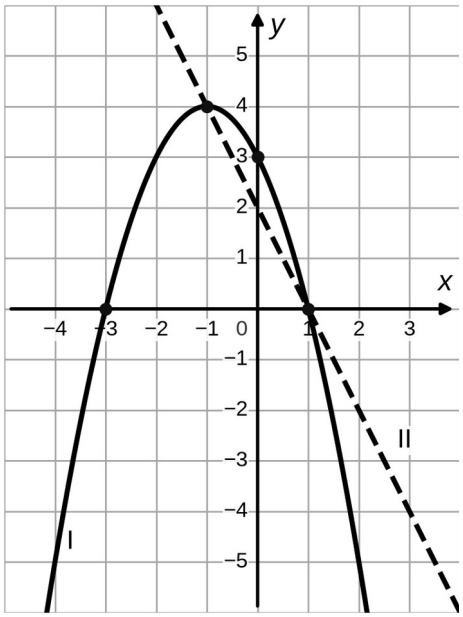
ج. جد النقاط الصفريّة ونقطة التقاطع مع المحور y.

د. جد المجال التصاعديّ والمجال التنازليّ، والمجال الذي تكون فيه الدالّة سالبة.

هـ. $g(0) = -12$. جد قيمة x أخرى تحقّق $g(x) = -12$. اشرح كيف يساعدك محور التماثل.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

3. في هيئة المحاور المجاورة رُسم قطع مكافئ (I) ومستقيم (II). المستقيم يمرّ بنقطة رأس القطع المكافئ وبإحدى نقطتيه الصفريّتين.



أ. جد معادلة القطع المكافئ بصورة الرأس، ثمّ بالصورة العامّة.

ب. جد ميل المستقيم ومعادلته.

ج. تحقّق جبريًّا من نقطتي التقاطع بين القطع المكافئ والمستقيم.

د. لأيّ قيم x يكون القطع المكافئ فوق المستقيم؟

هـ. احسب مساحة المثلّث الذي رؤوسه نقطة رأس القطع المكافئ ونقطتاه الصفريّتان.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الثاني: إيجاد الدالّة التربيعيّة

4. جد الدالّة التربيعيّة في كلّ بند، واكتبها بالصورة العامّة.

أ. نقطة رأس القطع المكافئ هي (3− ,2)، ويمرّ القطع بالنقطة (4 ,5).

y = _____

ب. النقطتان الصفريّتان للقطع المكافئ هما x = −1 وx = 5، ويقطع المحور y في النقطة (10− ,0). جد أيضًا نقطة رأسه.

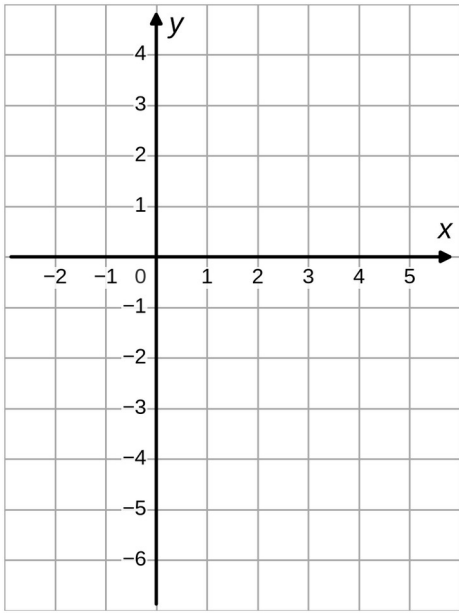
y = _____

ج. القطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ يمرّ بالنقطتين (6 ,1−) و(6 ,3). جد b وc، ثمّ اشرح لماذا لا يقطع هذا القطع المحور x.

b = _____ c = _____

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الثالث: تقاطع قطع مكافئ مع مستقيم



5. معطاة الدالّتان $f(x) = -x^2 + 4x$ و $g(x) = x - 4$.

أ. جد نقطتي التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين بطريقة جبريّة.

ب. ارسم الرسمين البيانيّين في هيئة المحاور المجاورة (جد أوّلًا نقطة رأس القطع المكافئ).

ج. لأيّ قيم x يكون المستقيم فوق القطع المكافئ؟

د. حلّ المتباينة $f(x) \geq g(x)$ بالاعتماد على الرسم.

هـ. احسب مساحة المثلّث الذي رؤوسه نقطتا التقاطع ونقطة أصل المحاور.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

6. معطاة الدالّة $y = x^2 - 6x + 5$. نقطة رأس القطع المكافئ هي A، ونقطتاه الصفريّتان B وC (B على يسار C)، ونقطة تقاطعه مع المحور y هي D.

أ. جد إحداثيّات النقاط A، B، C وD.

ب. جد ميل المستقيم AD ومعادلته.

ج. جد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة C ويوازي المستقيم AD.

د. المستقيم الذي وجدته في البند ج يقطع القطع المكافئ في نقطة أخرى غير C. جدها.

هـ. احسب مساحة المثلّث ABC ومساحة المثلّث BCD.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الرابع: أسئلة بارامتر ومساحات

7. في كلّ بند، جد قيم البارامتر المطلوبة.

أ. معطاة الدالّة $y = x^2 - 6x + k$. جد قيم k التي يكون فيها للقطع المكافئ نقطتان صفريّتان، ونقطة واحدة (يمسّ المحور x)، ولا نقطة صفريّة.

ب. جد كلّ قيم m التي يقطع فيها المستقيم $y = mx$ القطع المكافئ $y = x^2 - 2x + 4$ في نقطة واحدة فقط، وجد نقطة التقاطع في كلّ حالة.

ج. لأيّ قيم k لا يقطع المستقيم $y = 2x + k$ القطع المكافئ $y = x^2 - 4x + 7$؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

8. معطى القطع المكافئ $y = -x^2 + 2x + 8$ والمستقيم $y = x + 2$.

أ. جد نقطة رأس القطع المكافئ ونقطتيه الصفريّتين A وB (A على يسار B).

ب. جد نقطتي التقاطع بين القطع المكافئ والمستقيم. ماذا تلاحظ؟

ج. نسمّي نقطة التقاطع الأخرى C. احسب مساحة المثلّث ABC.

د. احسب مساحة المثلّث الذي رؤوسه A، B ونقطة رأس القطع المكافئ.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الجزء الخامس: مسائل تطبيقيّة



9. لدى مزارع سياج طوله 40 مترًا. أراد أن يحيط به قطعة أرض على شكل مستطيل بجانب جدار طويل (انظر الرسم: الخطّ المتقطّع هو السياج)، لذلك يُحاط المستطيل بالسياج من ثلاث جهات فقط. نرمز بـ x إلى طول ضلع المستطيل العموديّ على الجدار (بالأمتار).

أ. عبّر بواسطة x عن طول الضلع الموازي للجدار، وعن مساحة المستطيل $S(x)$.

ب. ما مجال القيم الممكنة لـ x؟

ج. جد قيمة x التي تكون فيها المساحة أكبر ما يمكن، واحسب هذه المساحة وأبعاد المستطيل.

د. لأيّ قيم x تكون المساحة 150 مترًا مربّعًا؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

10. قُذفت كرة إلى الأعلى من سطح بناية. ارتفاع الكرة عن الأرض (بالأمتار) بعد t ثانية يُعطى بالدالّة:

$h(t) = -5t^2 + 30t + 35$

أ. ما ارتفاع سطح البناية؟

ب. ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة، وبعد كم ثانية؟

ج. متى يكون ارتفاع الكرة 60 مترًا؟ وفي أيّ مجال زمنيّ تكون الكرة أعلى من 60 مترًا؟

د. بعد كم ثانية تصل الكرة إلى الأرض؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

11. سؤال تحدٍّ: معطاة عائلة الدوالّ $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3$، حيث k عدد ما.

أ. اكتب الدالّة بصورة الرأس، وعبّر بواسطة k عن إحداثيّات نقطة الرأس.

ب. اشرح لماذا تقع نقاط الرأس لكلّ دوالّ العائلة على مستقيم واحد، وجد معادلته.

ج. لأيّ قيمة k يمسّ القطع المكافئ المحور x؟

د. لأيّ قيمة k تقع نقطة الرأس على المستقيم $y = -x$؟

هـ. لأيّ قيم k يمرّ القطع المكافئ بنقطة أصل المحاور؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الإجابات

السؤال 1

أ	$(3, 8)$	نقطة رأس عظمى لأنّ $a = -2 < 0$.
ب	$x = 3$	
ج	$x = 0 : \ y = -2 \cdot 9 + 8 = -10$ $(x - 3)^2 = 4 \ \Rightarrow \ x = 1 \ , \ x = 5$	التقاطع مع المحور y: $(0, -10)$. مع المحور x: $(1, 0)$ و$(5, 0)$.
د	$x < 3$ $x > 3$	تصاعديّة عندما $x < 3$، وتنازليّة عندما $x > 3$.
هـ	$1 < x < 5$ $x < 1 \quad , \quad x > 5$	موجبة عندما $1 < x < 5$، وسالبة عندما $x < 1$ أو $x > 5$.
و	$y \le 8$	أكبر قيمة 8، وهي الإحداثيّ y لنقطة الرأس العظمى (عندما $x = 3$).

السؤال 2

أ	$x = \frac{-4}{2} = -2$ $y = 4 - 8 - 12 = -16$	نقطة الرأس $(-2, -16)$ صغرى.
ب	$g(x) = (x + 2)^2 - 16$	
ج	$(x + 6)(x - 2) = 0$ $x = -6 \ , \ x = 2$	النقاط الصفريّة $(-6, 0)$ و$(2, 0)$، والتقاطع مع المحور y: $(0, -12)$.
د	$x > -2$ $x < -2$ $-6 < x < 2$	تصاعديّة عندما $x > -2$، وتنازليّة عندما $x < -2$، وسالبة عندما $-6 < x < 2$.
هـ	$x^2 + 4x = 0 \ \Rightarrow \ x = -4$	النقطتان $(0, -12)$ و$(-4, -12)$ متماثلتان بالنسبة إلى المحور $x = -2$.

السؤال 3

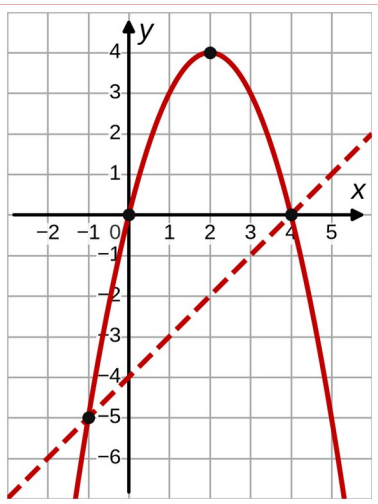
أ	$y = -(x + 1)^2 + 4$ $y = -x^2 - 2x + 3$	الرأس $(-1, 4)$، ونعوّض $(1, 0)$: $0 = a \cdot 4 + 4$، إذن $a = -1$.
ب	$m = \frac{0 - 4}{1 - (-1)} = -2$ $y = -2x + 2$	المستقيم يمرّ بالنقطتين $(-1, 4)$ و$(1, 0)$.
ج	$-x^2 - 2x + 3 = -2x + 2$ $x^2 = 1 \ \Rightarrow \ x = 1 \ , \ x = -1$	نقطتا التقاطع $(1, 0)$ و$(-1, 4)$.
د	$-1 < x < 1$	
هـ	$S = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	القاعدة بين $(-3, 0)$ و$(1, 0)$ طولها 4، والارتفاع 4. المساحة 8 وحدات مربّعة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 4

أ	$y = a(x-2)^2 - 3$ $5 = 4a - 3 \Rightarrow a = 2$ $y = 2x^2 - 8x + 5$	
ب	$y = a(x+1)(x-5)$ $-10 = -5a \Rightarrow a = 2$ $y = 2x^2 - 8x - 10$	نقطة الرأس: $x = 2$، $y = 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18$، أي $(2, -18)$.
ج	$1 - b + c = 6$ $9 + 3b + c = 6$ $b = -2\ ,\ c = 3$	الرأس $(1, 2)$:$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ صغرى وفوق المحور x، لذلك لا يقطعه.

السؤال 5

أ	$-x^2 + 4x = x - 4$ $x^2 - 3x - 4 = 0$ $(x-4)(x+1) = 0$	نقطتا التقاطع $(4, 0)$ و$(-1, -5)$.
ب		رأس القطع $(2, 4)$، ونقطتاه الصفريّتان $(0, 0)$ و$(4, 0)$. المستقيم متقطّع.
ج	$x < -1\ \ ,\ \ x > 4$	
د	$-1 \le x \le 4$	
هـ	$S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$	القاعدة من $(0, 0)$ إلى $(4, 0)$ طولها 4، والارتفاع هو بُعد $(-5, -1)$ عن المحور x، أي 5.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 6

أ	$A(3,-4)\quad B(1,0)$ $C(5,0)\quad D(0,5)$	$x = 6:2 = 3$، و$(x-1)(x-5) = 0$.
ب	$m = \frac{5-(-4)}{0-3} = -3$ $y = -3x + 5$	
ج	$0 = -3 \cdot 5 + n \Rightarrow n = 15$ $y = -3x + 15$	مستقيمان متوازيان لهما الميل نفسه.
د	$x^2 - 6x + 5 = -3x + 15$ $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x = 5\ ,\ x = -2$	النقطة الأخرى $(-2, 21)$.
هـ	$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ $S_{BCD} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$	القاعدة $BC = 4$. الارتفاع في الأوّل 4 (بُعد A)، وفي الثاني 5 (بُعد D).

السؤال 7

أ	$b^2 - 4ac = 36 - 4k$	نقطتان عندما $k < 9$، نقطة واحدة عندما $k = 9$، ولا نقطة صفريّة عندما $k > 9$.
ب	$x^2 - (2+m)x + 4 = 0$ $(2+m)^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = 2\ ,\ m = -6$	$m = 2$: $x^2 - 4x + 4 = 0$، نقطة التماسّ $(2, 4)$. $m = -6$: $x^2 + 4x + 4 = 0$، نقطة التماسّ $(-2, 12)$.
ج	$x^2 - 6x + 7 - k = 0$ $36 - 4(7-k) < 0$ $8 + 4k < 0 \Rightarrow k < -2$	لا يتقاطعان عندما يكون ما تحت الجذر سالبًا.

السؤال 8

أ	$V(1, 9)$ $A(-2, 0)\quad B(4, 0)$	$x = -2:(-2) = 1$، و$-(x+2)(x-4) = 0$.
ب	$-x^2 + 2x + 8 = x + 2$ $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3\ ,\ x = -2$	نقطتا التقاطع $(-2, 0)$ و$(3, 5)$. نلاحظ أنّ المستقيم يمرّ بالنقطة الصفريّة A.
ج	$S = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$	القاعدة $AB = 6$، والارتفاع 5 (الإحداثيّ y للنقطة $C(3, 5)$).
د	$S = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$	

السؤال 9

أ	$40 - 2x$ $S(x) = x(40-2x) = -2x^2 + 40x$	
ب	$0 < x < 20$	الطولان موجبان.
ج	$x = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10$ $S(10) = 200$	أكبر مساحة 200 متر مربّع، والأبعاد 10 أمتار و20 مترًا.
د	$-2x^2 + 40x = 150$ $x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow x = 5\ ,\ x = 15$	

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال 10

أ	$h(0) = 35$	35 مترًا.
ب	$t = \frac{-30}{2 \cdot (-5)} = 3$ $h(3) = -45 + 90 + 35 = 80$	أقصى ارتفاع 80 مترًا بعد 3 ثوانٍ.
ج	$-5t^2 + 30t + 35 = 60$ $t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1 , \ t = 5$	بعد ثانية واحدة وبعد 5 ثوانٍ، والكرة أعلى من 60 مترًا عندما $1 < t < 5$.
د	$t^2 - 6t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7$	بعد 7 ثوانٍ؛ الحلّ $t = -1$ مرفوض.

السؤال 11

أ	$y = (x - k)^2 + 2k - 3$ $(k , 2k - 3)$	
ب	$y = 2x - 3$	نقطة الرأس $x = k$، $y = 2k - 3 = 2x - 3$: كلّ نقاط الرأس على هذا المستقيم.
ج	$2k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$	يمسّ القطع المحور x عندما تكون نقطة الرأس عليه.
د	$2k - 3 = -k \Rightarrow k = 1$	نقطة الرأس عندئذٍ $(1, -1)$.
هـ	$k^2 + 2k - 3 = 0$ $(k + 3)(k - 1) = 0 \Rightarrow k = -3 , \ k = 1$	نعوّض $(0, 0)$ في الدالّة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي