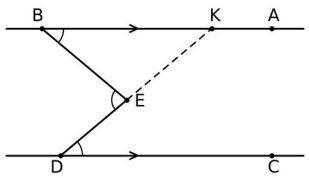
حلول: امتحان في الهندسة

الصف التاسع – 5 وحدات

مفتاح الإجابات للمعلّم – المثلث المتساوي الساقين، المستقيمات المتوازية وتطابق المثلثات

السؤال الأول



المعطيات: المستقيمان AB و CD متوازيان: $AB \parallel CD$. النقطة E تقع بين المستقيمين، كما في الرسم.

$\measuredangle ABE = (2x + 10)^\circ$، $\measuredangle CDE = (3x - 5)^\circ$،
$\measuredangle BED = (4x + 20)^\circ$.

أ) ارسم عبر النقطة E مستقيمًا EF موازيًا للمستقيم AB، بحيث تقع النقطة F داخل الزاوية $\measuredangle BED$. برهن أنّ $\measuredangle BED = \measuredangle ABE + \measuredangle CDE$.

	الادّعاء	التعليل
1	$EF \parallel AB$	رسم مساعد
2	$\measuredangle BEF = \measuredangle ABE$	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين ($EF \parallel AB$، القاطع BE)
3	$EF \parallel CD$	مستقيمان موازيان لمستقيم ثالث متوازيان ($EF \parallel AB$ و $AB \parallel CD$)
4	$\measuredangle FED = \measuredangle CDE$	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين ($EF \parallel CD$، القاطع DE)
5	$\measuredangle BED = \measuredangle BEF + \measuredangle FED$ $\measuredangle BED = \measuredangle ABE + \measuredangle CDE$	F داخل الزاوية $\measuredangle BED$ (مجموع زاويتين متجاورتين)، ومن 2 و 4

ب) احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس كلّ من الزوايا $\measuredangle ABE$، $\measuredangle CDE$ و $\measuredangle BED$.

من البند أ:

$(2x + 10) + (3x - 5) = 4x + 20$

$5x + 5 = 4x + 20 \implies x = 15$

إذن (بالتعويض $x = 15$):

$\measuredangle ABE = 40^\circ$, $\measuredangle CDE = 40^\circ$, $\measuredangle BED = 80^\circ$

تحقّق: $40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

ج) امتداد القطعة DE يقطع المستقيم AB في النقطة K. برهن أنّ المثلث △KBE متساوي الساقين.

	الادّعاء	التعليل
1	∢BKD = ∢KDC	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين (AB ‖ CD، القاطع KD)
2	∢BKE = ∢CDE = 40°	النقاط K، E، D على استقامة واحدة، ومن 1 والبند ب
3	∢KBE = ∢ABE = 40°	النقطة K على الشعاع BA، ومن البند ب
4	EB = EK، أي أنّ △KBE متساوي الساقين	في المثلث، مقابل زاويتين متساويتين ضلعان متساويان (من 2 و 3)

د) احسب قياس الزاوية ∢BEK. علّل.

∢BEK = 180° − ∢BED = 180° − 80° = 100° (زاويتان متجاورتان، لأنّ K، E، D على استقامة واحدة).

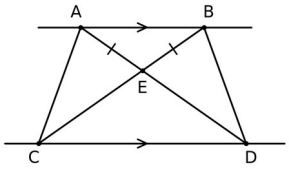
تحقّق: ∢BED زاوية خارجية للمثلث △KBE، إذن:

∢BED = ∢KBE + ∢BKE = 40° + 40° = 80°

السؤال الثاني

المعطيات: AB ‖ CD.

القطعتان AD و BC تتقاطعان في النقطة E، و EA = EB.



أ) برهن أنّ EC = ED.

	الادّعاء	التعليل
1	∢EAB = ∢EBA	في المثلث △EAB، مقابل ضلعين متساويين (EA = EB) زاويتان متساويتان
2	∢EAB = ∢EDC	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين (AB ‖ CD، القاطع AD)
3	∢EBA = ∢ECD	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين (AB ‖ CD، القاطع BC)
4	∢ECD = ∢EDC	من 1، 2، 3
5	EC = ED	في المثلث △ECD، مقابل زاويتين متساويتين ضلعان متساويان

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

ب) برهن أنّ $\triangle AEC \cong \triangle BED$، واستنتج أنّ $AC = BD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$EA = EB$	معطى
2	$\measuredangle AEC = \measuredangle BED$	زاويتان متقابلتان بالرأس
3	$EC = ED$	البند أ
4	$\triangle AEC \cong \triangle BED$	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)
5	$AC = BD$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين

ج) برهن أنّ $\measuredangle CAB = \measuredangle DBA$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle CAE = \measuredangle DBE$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين (البند ب)
2	$\measuredangle EAB = \measuredangle EBA$	البند أ (الادّعاء 1)
3	$\measuredangle CAB = \measuredangle CAE + \measuredangle EAB$ $\measuredangle DBA = \measuredangle DBE + \measuredangle EBA$	مجموع زاويتين متجاورتين
4	$\measuredangle CAB = \measuredangle DBA$	من 1، 2، 3

د) معطى أيضًا: $\measuredangle AEB = 110°$، $\measuredangle CAB = (4x + 10)°$، $\measuredangle ACD = (2x + 20)°$. احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس كلّ من الزاويتين $\measuredangle ECD$ و $\measuredangle ACB$.

$\measuredangle CAB + \measuredangle ACD = 180°$: زاويتان متحالفتان بين مستقيمين متوازيين ($AB \parallel CD$، القاطع AC).

$(4x + 10) + (2x + 20) = 180 \implies 6x = 150 \implies x = 25$

إذن $\measuredangle CAB = 110°$ و $\measuredangle ACD = 70°$.

$\measuredangle CED = \measuredangle AEB = 110°$ (زاويتان متقابلتان بالرأس).

المثلث $\triangle ECD$ متساوي الساقين ($EC = ED$)، إذن:

$\measuredangle ECD = (180° - 110°) : 2 = 35°$

$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD - \measuredangle ECD = 70° - 35° = 35°$.

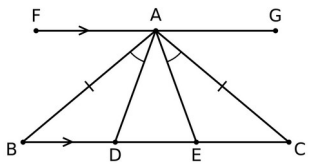
السؤال الثالث

المعطيات: في المثلث $\triangle ABC$: $AB = AC$.

النقطتان D و E تقعان على الضلع BC،

بحيث $\measuredangle CAE = \measuredangle BAD$.

عبر الرأس A رُسم المستقيم FG موازيًا للضلع BC.



© المعلّمة كرستين عيد برانسي

أ) برهن أنّ $\triangle ACE \cong \triangle ABD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AC$	معطى
2	$\measuredangle ABD = \measuredangle ACE$	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$
3	$\measuredangle BAD = \measuredangle CAE$	معطى
4	$\triangle ABD \cong \triangle ACE$	نظرية التطابق ز ض ز (من 1، 2، 3)

ب) برهن أنّ $BD = CE$، وأنّ المثلث $\triangle ADE$ متساوي الساقين.

	الادّعاء	التعليل
1	$BD = CE$	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين (البند أ)
2	$AD = AE$، أي أنّ $\triangle ADE$ متساوي الساقين	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين (البند أ)

ج) برهن أنّ $\measuredangle GAE = \measuredangle FAD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle FAD = \measuredangle ADE$	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين ($FG \parallel BC$، القاطع AD)
2	$\measuredangle GAE = \measuredangle AED$	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين ($FG \parallel BC$، القاطع AE)
3	$\measuredangle ADE = \measuredangle AED$	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ADE$ (البند ب)
4	$\measuredangle FAD = \measuredangle GAE$	من 1، 2، 3

د) معطى: $\measuredangle BAD = (x + 10)°$، $\measuredangle DAE = 2x°$، $\measuredangle ABC = (x + 20)°$. احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس الزاويتين $\measuredangle ADE$ و $\measuredangle FAD$.

$\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = (x + 20)°$ (زاويتا القاعدة في $\triangle ABC$).

$\measuredangle CAE = \measuredangle BAD = (x + 10)°$ (معطى). مجموع زوايا المثلث $\triangle ABC$:

$2(x + 20) + 2(x + 10) + 2x = 180 \implies 6x + 60 = 180 \implies x = 20$

إذن $\measuredangle BAD = 30°$، $\measuredangle DAE = 40°$، $\measuredangle ABC = 40°$.

في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ADE$: $\measuredangle ADE = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

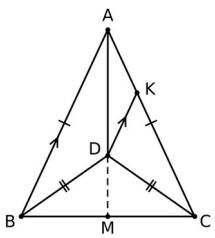
$\measuredangle FAD = \measuredangle ADE = 70°$ (زاويتان متبادلتان، البند ج).

السؤال الرابع

المعطيات: في المثلث $\triangle ABC$: $AB = AC$.

النقطة D تقع داخل المثلث بحيث $DB = DC$.

امتداد القطعة AD يقطع الضلع BC في النقطة M.



© المعلّمة كرستين عيد برانسي

أ) برهن أنّ $\triangle ACD \cong \triangle ABD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AB = AC$	معطى
2	$DB = DC$	معطى
3	$AD = AD$	ضلع مشترك
4	$\triangle ACD \cong \triangle ABD$	نظرية التطابق ض ض ض (من 1، 2، 3)

ب) برهن أنّ $AM \perp BC$ وأنّ $BM = MC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين (البند أ)
2	AM ينصّف زاوية الرأس $\sphericalangle BAC$ في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$	من 1 (M على امتداد AD)
3	$AM \perp BC$ و $BM = MC$	في المثلث المتساوي الساقين، منصّف زاوية الرأس هو أيضًا الارتفاع والمتوسط إلى القاعدة

ج) عبر النقطة D رُسم مستقيم موازٍ للضلع AB، يقطع الضلع AC في النقطة K. برهن أنّ $KA = KD$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\sphericalangle KDA = \sphericalangle DAB$	زاويتان متبادلتان بين مستقيمين متوازيين ($DK \parallel AB$، القاطع AD)
2	$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAK$	البند ب (AD ينصّف $\sphericalangle BAC$)
3	$\sphericalangle KDA = \sphericalangle KAD$	من 1 و 2
4	$KA = KD$	في المثلث $\triangle AKD$، مقابل زاويتين متساويتين ضلعان متساويان

د) معطى: $\sphericalangle BAC = 50°$ و $\sphericalangle BDC = 110°$. احسب قياس الزاويتين $\sphericalangle ABD$ و $\sphericalangle AKD$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = (180° - 50°) : 2 = 65°$ (المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$).

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = (180° - 110°) : 2 = 35°$ (المثلث المتساوي الساقين $\triangle DBC$).

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBC = 65° - 35° = 30°$.

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle AKD = 180°$: زاويتان متحالفتان ($DK \parallel AB$، القاطع AC).

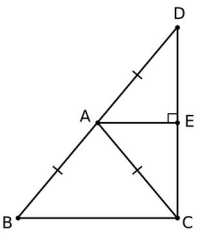
$\sphericalangle AKD = 180° - 50° = 130°$

طريقة أخرى: $\sphericalangle KDA = \sphericalangle KAD = 50° : 2 = 25°$، إذن:

$\sphericalangle AKD = 180° - 25° - 25° = 130°$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

السؤال الخامس



المعطيات: في المثلث $\triangle ABC$: $AB = AC$.
النقطة D تقع على امتداد الضلع BA (بعد الرأس A)
بحيث $AD = AB$.
AE عمود على CD (النقطة E على CD).

أ) برهن أنّ $\measuredangle BCD = 90°$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$ ($AB = AC$)
2	$AD = AC$	$AD = AB$ و $AB = AC$ (معطى)
3	$\measuredangle ADC = \measuredangle ACD$	زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ACD$
4	$\measuredangle BCD = \measuredangle ACB + \measuredangle ACD$	مجموع زاويتين متجاورتين
5	$\measuredangle DBC + \measuredangle BCD + \measuredangle BDC = 180°$	مجموع زوايا المثلث $\triangle BCD$
6	$2\measuredangle ACB + 2\measuredangle ACD = 180°$ $\measuredangle BCD = 90°$	من 1، 3، 4، 5 ($\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$ و $\measuredangle BDC = \measuredangle ADC$)

ب) برهن بواسطة تطابق المثلثات أنّ النقطة E منتصف القطعة CD.

	الادّعاء	التعليل
1	$AD = AC$	البند أ (الادّعاء 2)
2	$AE = AE$	ضلع مشترك
3	$\measuredangle AED = \measuredangle AEC = 90°$	معطى ($AE \perp CD$)
4	$\triangle ADE \cong \triangle ACE$	نظرية التطابق ض ض ز (الزاوية القائمة تقابل الضلع الأكبر AD)
5	$DE = CE$، أي أنّ E منتصف CD	أضلاع متناظرة في مثلثين متطابقين

ج) برهن أنّ $AE \parallel BC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle AED = 90°$	معطى ($AE \perp CD$)
2	$\measuredangle BCD = 90°$	البند أ
3	$AE \parallel BC$	زاويتان متناظرتان متساويتان (القاطع CD)

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

د) معطى: $\measuredangle ADC = (x + 15)°$ و $\measuredangle ABC = 2x°$. احسب قيمة x، ثمّ احسب قياس الزاويتين $\measuredangle BAC$ و $\measuredangle CAE$.

من البند أ: $\measuredangle BCD = 90° = \measuredangle ACB + \measuredangle ACD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC$.

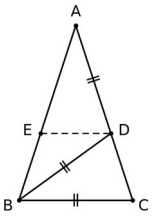
$2x + (x + 15) = 90 \implies 3x = 75 \implies x = 25$

إذن $\measuredangle ABC = 50°$ و $\measuredangle ADC = 40°$، و $\measuredangle BAC = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$.

$\measuredangle CAE = \measuredangle ACB = 50°$ (زاويتان متبادلتان، $AE \parallel BC$، القاطع AC).

طريقة أخرى: $\measuredangle CAD = 180° - 80° = 100°$، ومن التطابق في البند ب $\measuredangle CAE = \measuredangle DAE = 50°$.

السؤال السادس (سؤال تحدٍّ)



المعطيات: في المثلث $\triangle ABC$: $AB = AC$.

النقطة D تقع على الضلع AC بحيث $AD = BD = BC$.

أ) نرمز: $\measuredangle BAC = x$. عبّر بواسطة x عن الزاويتين $\measuredangle ABD$ و $\measuredangle BDC$، ثمّ احسب زوايا المثلث $\triangle ABC$.

$\measuredangle BAD = \measuredangle ABD = x$: زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABD$ $(AD = BD)$.

$\measuredangle BDC = \measuredangle BAD + \measuredangle ABD = 2x$: الزاوية الخارجية للمثلث $\triangle ABD$ تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

$\measuredangle BCD = \measuredangle BDC = 2x$: زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين $\triangle BDC$ $(BD = BC)$.

$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 2x$ $(AB = AC)$. مجموع زوايا المثلث $\triangle ABC$:

$x + 2x + 2x = 180° \implies 5x = 180° \implies x = 36°$

إذن $\measuredangle BAC = 36°$ و $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 72°$.

ب) برهن أنّ BD ينصّف الزاوية $\measuredangle ABC$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle ABD = 36°$	البند أ $(\measuredangle ABD = x)$
2	$\measuredangle DBC = \measuredangle ABC - \measuredangle ABD$ $\measuredangle DBC = 72° - 36° = 36°$	البند أ $(\measuredangle ABC = 72°)$
3	$\measuredangle DBC = \measuredangle ABD$، أي أنّ BD ينصّف $\measuredangle ABC$	من 1 و 2

ج) النقطة E تقع على الضلع AB بحيث $AE = BC$. برهن أنّ $\triangle BCD \cong \triangle AED$.

	الادّعاء	التعليل
1	$AE = BC$	معطى
2	$\measuredangle EAD = \measuredangle CBD = 36°$	البندان أ و ب
3	$AD = BD$	معطى
4	$\triangle BCD \cong \triangle AED$	نظرية التطابق ض ز ض (من 1، 2، 3)

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

د) برهن أنّ $BC \parallel ED$.

	الادّعاء	التعليل
1	$\measuredangle AED = \measuredangle BCD = 72°$	زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين (البند ج)، والبند أ
2	$\measuredangle ABC = 72°$	البند أ
3	$\measuredangle AED = \measuredangle ABC$، إذن $ED \parallel BC$	زاويتان متناظرتان متساويتان (القاطع AB)

© المعلّمة كرستين عيد برانسي